Correction proposée

Devoir harmonisé n°1 de Maths

Exercice 01 :

I. Questions de cours

1⟶faux. Pour comparer deux réels a et b, on peut calculer a^2 et b^2, si $a^2>b^2$ alors a>b.

2⟶Vrai

3 ⟶Vrai

4⟶Faux, $(-a)^n = \begin{cases} a^n \; si\ n\ est\ pair \\ -a^n \; si\ n\ est\ impair \end{cases}$

5⟶Faux, Soit trois points $I; J\ et\ K$. Si $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$, avec k un réel, alors $I, J\ et\ K$ sont alignés.

6⟶Vrai

7⟶Vrai

8⟶Faux, On dit que γ est une valeur approchée de x par défaut à θ près, lorsque $\gamma < x \leq \gamma + \theta$.

II.

A= $\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{4}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}$

1 . Déterminons le signe de A :

$$\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 = 1+\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 = 1-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 = \frac{\sqrt{7}}{2} > 0.$$

Donc A est positif.

B= $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

2. Montrons que B=2^4.

B= $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

= $\sqrt{\frac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)\hat{}4+(2^2)^{11}}}$=$\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}$

= $\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}$=$\sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}}$

= $\frac{\sqrt{2^{20}}}{\sqrt{2^{12}}} = \frac{2^{10}}{2^6} = 2^{10} \times 2^{-6}$

= 2^4, donc B= 2^4

3. C= $27x^3 - \frac{1}{8}$

Factorisons C

C= $27x^3 - \frac{1}{8}$

C =$(3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Exercice 02 :

1. Factorisons

K=$(x^2+y^2-5)^2 - 4(xy+2)^2$

= $(x^2+y^2-5)^2 - \left(2(xy+2)\right)^2$

= $(x^2+y^2-5+2xy+4)(x^2+y^2-5-2xy-4)$

=$((x+y)^2-1)((x-y)^2-9)$

K =$(x+y+1)(x+y-1)(x-y+3)(x-y-3)$

2. Résolvons

$\sqrt{(1-2x)^2} \leq 7 \Leftrightarrow |1-2x| \leq 7$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-7 \leq 1-2x \leq 7}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-7-1 \leq -2x \leq 7-1}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-8 \leq -2x \leq 6}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{-8}{-2} \geq x \geq \frac{6}{-2}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{4 \geq x \geq -3}$

S=$[-3; 4]$

3. a. Montrons : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 7$

On a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$, donc $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = 9$

Or $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + 2\frac{a}{b}\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} = 9$

D'où $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 9-2$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 7$$

b. Déterminons la valeur de : $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}$

On a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$, donc $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 = 27$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} + 3\frac{a^2}{b^2}\frac{b}{a} + 3\frac{a}{b}\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3}$$

$$= \frac{a^3}{b^3} + 3\frac{a}{b} + 3\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^3}$$

$$= \frac{a^3}{b^3} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{b^3}{a^3}$$

$$= \frac{a^3}{b^3} + 3 \times 3 + \frac{b^3}{a^3}$$

$$= \frac{a^3}{b^3} + 9 + \frac{b^3}{a^3} = 27$$

Donc $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = 27 - 9$

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = 18$$

Exercice 03 :

1. a. sur la figure
   b. Déduisons
   on a : $\overrightarrow{KJ} = -\overrightarrow{KT}$, insérons le point I par la relation de chasles.

$$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{KT}$$
$$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{KT}$$

Or $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}$, *donc* $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT}$

2. *a. Exprimons* $\overrightarrow{PB}$ *en fonction de* $\overrightarrow{PT}$ *et construisons.*

On a : $2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BT} = \vec{0}$, *insérons le point P par la relation de chasles.*

$$2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PT}$$

$$-3\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PT}$$

Donc $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PT}$

b. En déduire que : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{KP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}$

On sait que : $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PT}$, *insérons I et K par la relation de chasles :*

$\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KT})$, *donc*

$$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{PI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}, \text{ or } -\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}$$

$$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{KP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}$$

D'où $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{KP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}$

Montrons que: $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IB}$

On a: $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{KP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}$

$$-3\,\overrightarrow{IB} = -3\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{KP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KT}\right)$$

$$= -\frac{3}{6}\overrightarrow{KP} - \frac{3}{3}\overrightarrow{KT}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT}$$

$= \overrightarrow{IJ}$, *donc* $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IB}$

c. Les points I, J *et* B *sont alignés.*

FIN